טופס מבחן לדוגמה 1

שאלה 1

תהי A מטריצה ממשית מסדר $m\times n$. אזי בהכרח מתקיים:

א. עבור $m=n$, אם למערכת $Ax=b$ יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$ אז בהכרח למערכת $A^t x=b$ יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$.
ב. ייתכן ש- $A^tA=I_n$ וגם $AA^t=I_m$.
ג. אם $rank\left(A\right)=n$ אז למערכת ההומוגנית $Ax=0$ יש אינסוף פתרונות.
ד. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ יש אינסוף פתרונות א בהכרח $m<n$.
ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

שאלה 2

יהיו A,B מטריצות ממשיות מסדר $n\times n$. אז בהכרח מתקיים:

א. אם למערכת ההומוגנית $\left(AB\right)x=0$ קיים פתרון יחיד אז ייתכן ש $|A|=0$.
ב. אם קיים פתרון שונה מ- 0 למערכת ההומוגנית $\left(AB\right)x=0$ אז למערכת ההומוגנית $Ax=0$ קיים פתרון שונה מ- 0.
ג. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ קיים פתרון יחיד אז ייתכן ש- $A^2=0$.
ד. אם למערכת ההומוגנית $\left(A^tA\right)x=0$ קיים פתרון יחיד אז השורות של A בלתי- תלויה ליניארית.
ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

שאלה 3

תהיינה A,B מטריצות ריבועיות מסדר $n\geq 2$. אזי בהכרח מתקיים:

א. אם $rank\left(A\right)=n-1$ אז בהכרח $rank\left(A^2\right)=n-1$.
ב. אם $rank\left(A^2\right)=n-1$ אז בהכרח $rank\left(A\right)=n-1$.
ג. ייתכן ש- $rank\left(A\right)<rank\left(AB\right)$.
ד. אם $rank\left(A\right)<rank\left(AB\right)$ אז בהכרח B הפיכה.
ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

שאלה 4

תהיינה A,B מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n\geq 2$. אזי בהכרח מתקיים:

א. $AB=BA$.
ב. אם $A^2-AB=I_n$ אז בהכרח B הפיכה.
ג. אם $\left(AB\right)^{100}=I$ אז בהכרח $\left(BA\right)^{100}=I$.
ד. אם $\left(AB\right)^{100}=0$ אז בהכרח $\left(BA\right)^{101}=0$.
ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

<u>שאלה 5</u>

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ויהיו $v_1,v_2,v_3\in V$. נסמן $S=\{v_1,v_2,v_3\}$

$T=\{av_1+v_2+v_3,v_1+av_2+v_3,v_1+v_2+av_3\}$. אז בהכרח מתקיים:

א. $spS\subseteq spT$.
ב. אם S בלתי תלויה ליניארית ואם $a\neq -2,1$ אז בהכרח $spT=spS$.
ג. $\dim(spT)\leq 2$.
ד. $\dim(spT)=\dim(spS)$.
ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

<u>שאלה 6</u>

תהי $A=(a_{ij})$ מטריצה ריבועית מסדר $n\geq 2$ כך ש- $a_{ij}=\begin{cases} i & i=j \\ 1 & i\neq j\end{cases}$.

לכל $1\leq i,j\leq n$ אז בהכרח מתקיים:

א. $|A|=n!-1$.
ב. $|A|\neq 0$.
ג. עמודות A בלתי- תלויות ליניארית. נכונה
ד. $adj(A)=0$.
ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

<u>שאלה 7</u>

תהיינה A,B מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n\geq 2$. אי בהכרח מתקיים:

א. מרחב השורות של A^2 מוכל במרחב השורות של A.
ב. אם $AB=0$ אז בהכרח $B=0$ או $A=0$.
ג. אם AB משולשית עליונה אז בהכרח A משולשית עליונה או B משולשית עליונה.
ד. אם $AB=B$ ובנוסף A נילפוטנטית אז בהכרח $B=0$.
ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

<u>שאלה 8</u>

נסמן $U=Sp\left\{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\right\}$, $W=Sp\left\{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\right\}$ שני תת- מרחבים של $\mathbb{R}^3$.

אזי בהכרח מתקיים:

א. $U=W$.
ב. $\dim U=\dim W$.
ג. $U\subseteq W$.
ד. אם $U+W=\mathbb{R}^3$ אז $U\cap W=\{0\}$.
ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

<u>שאלה 9</u>

הערך המוחלט של המספר המרוכב $\left(1-i\sqrt{3}\right)^6$ שווה ל- :

א. 2^3.
ב. $64i$.
ג. 2^6.
ד. 0.
ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

<u>שאלה 10</u>

הקבוצה הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$: $\left\{\begin{pmatrix}1\\a\\a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a\\1\\a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a\\a\\1\end{pmatrix}\right\}$

א. בלתי תלויה ליניארית (לכל $a\in\mathbb{Z}_5$).
ב. תלויה ליניארית (לכל $a\in\mathbb{Z}_5$).
ג. בלתי תלויה ליניארית אם ורק אם $a\neq 1$.
ד. בלתי תלויה ליניארית אם ורק אם $a\neq 2$.
ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

<u>שאלה 11</u>

תהי A קבוצה בת 6 פולינומים במרחב $\mathbb{R}_5[x]$ מעל $\mathbb{R}$ (מרחב הפולינומים ממעלה עד וכולל 5), ונניח בנוסף ש $\mathbb{R}_5[x]=Sp(A)$. אזי בהכרח מתקיים :

א. ייתכן ש A מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 4.
ב. ייתכן ש A מכילה בדיוק 5 פולינומים ממעלה 3.
ג. שני מרחבים של $\mathbb{R}_5[x]$ מאותו מימד בהכרח שווים.
ד. A תלויה ליניארית.
ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

<u>שאלה 12</u>

יהי a מספר ממשי ויהיו $W=Sp\left\{\begin{pmatrix}a\\1\\a\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\a\\a\end{pmatrix}\right\}$, $U=Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\a\\1\\a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a\\a\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ שני תת מרחבים של $\mathbb{R}^4$.

בהכרח מתקיים :

א. $U\cap W=\{0\}$ לכל ערכי a.
ב. $U\cap W\neq\{0\}$ לכל ערכי a.
ג. $\dim(U\cap W)=3$ לכל ערכי $a\neq\pm1$.

ד. $\dim(U \cap W)=1$ לכל ערכי $a \neq \pm 1$.

ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

שאלה 13

נתונות המטריצות $R=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ $T=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$. אז בהכרח מתקיים:

א. $rank(T)=1, rank(R)=2$.

ב. $rank\left(R^3T^5\right)=1$.

ג. $rank\left(R^3T^5\right)=2$.

ד. $rank\left(R^3T^5\right)=3$.

ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

שאלה 14

במרחב וקטורי $\mathbb{R}^2$ מעל שדה $\mathbb{R}$ תהי $A=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ קבוצה סדורה של 2 וקטורים מ- $\mathbb{R}^2$. אז מטריצה P המקיימת $[v]_A = Pv$ לכל $v \in \mathbb{R}^2$ שווה ל-:

א. $P=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

ב. $P=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

ג. $P=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

ד. $P=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

שאלה 15

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, ותהיינה A, B **קבוצות שונות לא ריקות וזרות** של וקטורים מ- V. אז בהכרח מתקיים:

א. אם $A \cup B$ בלתי תלויה ליניארית, אז בהכרח $sp(A) \cap sp(B) = \{0\}$.

ב. אם $A \cup B$ תלויה ליניארית אז בהכרח A תלויה ליניארית או B תלויה ליניארית.

ג. אם A, B בלתי תלויות ליניארית אז בהכרח $A \cup B$ בלתי תלויה ליניארית.

ד. אם $sp(A) \cup sp(B) = sp(A \cup B)$ אז בהכרח $A \cup B$ תלויה ליניארית.

ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

שאלה 16

תהי $T:V\rightarrow V$ העתקה ליניארית כך ש $\dim(V)=n$ ויהיו B_2,B_1 בסיסים סדורים של V.

אז בהכרח מתקיים:

א. $[T]_{B_1}^{B_1}=I_n$

ב. אם T הפיכה אז בהכרח $\left[T^{-1}\right]_{B_1}^{B_1}=\left([T]_{B_1}^{B_1}\right)^{-1}$

ג. אם T העתקת זהות אז בהכרח $[T]_{B_2}^{B_1}[T]_{B_1}^{B_2}=I_n$

ד. בהכרח $T\neq 0$

ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות

שאלה 17

תהי $T:M_n(\mathbb{R})\rightarrow M_n(\mathbb{R})$ העתקה ליניארית המוגדרת באופן $T(X)=AX-XA$ כאשר A מטריצה נתונה מסדר $n\geq 2$. אז בהכרח מתקיים:

א. $\dim(\operatorname{Im}(T))=\dim(\ker(T))$

ב. אם B בסיס ל- $M_n(\mathbb{R})$ אזי $[T]_B^B$ מסדר n.

ג. ייתכן ש- T העתקת על.

ד. $\dim(\operatorname{Im}(T))\leq n^2-1$

ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

שאלה 18

תהי $T:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^n$ העתקה ליניארית, ותהי A מטריצה ממשית כך שמתקיים $T(v)=Av$ לכל $v\in\mathbb{R}^n$. אזי בהכרח מתקיים:

א. אם $rank(A)=n$ אזי T לא בהכרח חד- חד ערכית.

ב. אם B בסיס ל- $\mathbb{R}^n$ ואם $rank(A)=n$ אזי $[T]_B^B$ הפיכה.

ג. אם $T(T(v))=0$ לכל $v\in\mathbb{R}^n$ אז $rank(A)\leq n/2$.

ד. ייתכנו מקרים בהם $rank(A)=n$ אבל T אינה על.

ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

שאלה 19

תהי $T:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^m$ העתקה ליניארית, אזי בהכרח:

א. אם T היא איזומורפיזם, אזי $m=n$.

ב. אם $m>n$ אזי T חח״ע.

ג. אם $T(v)=Av$ לכל $v\in V$ (כאשר A מטריצה ממשית נתונה), אזי ל A יש m שורות ו-n עמודות.

ד. אם $T(v)=Av$ לכל $v\in V$ (כאשר A מטריצה ממשית נתונה), אזי ל A יש n שורות ו-m עמודות.

ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

<u>שאלה 20</u>

תהי $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ העתקה ליניארית , ויהי $B=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ בסיס ל- $\mathbb{R}^4$. אזי בהכרח מתקיים :

א. ייתכנו מקרים בהם T העתקה חד- חד ערכית.

ב. ייתכנו מקרים בהם $T(v_1)=0$ אבל T חד- חד ערכית.

ג. אם T העתקת על אזי בהכרח $\ker(T)$ מכילה וקטור שונה מאפס.

ד. בדיוק וקטור אחד בקבוצה $\{T(v_1),T(v_2),T(v_3)T(v_4)\}$ הוא צירוף ליניארי של האחרים.

ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

טופס מבחן לדוגמה 2

חלק ראשון
שאלה 1

א. הגדירו את המושג: "אי- תלות ליניארית של קבוצת וקטורים $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$"

יהיו u, v, w וקטורים כך ש $\{u,v\}$ בלתי- תלויה ליניארית ו $u \in Sp(\{v,w\})$.

ב. הוכיחו ש $w \in Sp(\{u,v\})$.

ג. אם נתון גם שעבור וקטור נוסף z, הקבוצה $\{v,w,z\}$ בלתי תלויה ליניארית, הוכיחו שגם הקבוצה $\{u,v,z\}$ בלתי- תלויה ליניארית.

שאלה 2

א. הגדירו את המושג "העתקה ליניארית ממרחב וקטורי V למרחב וקטורי W".

ב. הוכיחו או הפריכו: קיימת העתקה ליניארית T מ $I\mathbb{R}^5$ ל $I\mathbb{R}^5$ עבורה $KerT = \operatorname{Im}T$

הוכיחו או הפריכו: קיימת העתקה ליניארית T מ $I\mathbb{R}^4$ ל $I\mathbb{R}^4$ עבורה $KerT = \operatorname{Im}T$

שאלה 3

א. הגדירו את המושג "מטריצה הפוכה".

תהיינה A, B מטריצות מסדר $n \times n$ עבורן $A^2 + AB$ היא מטריצה היחידה.

ב. הוכיחו ש $AB = BA$.

ג. אם נתון בנוסף ש $B^2 + BA$ היא מטריצת האפס, הוכיחו שגם B היא מטריצת האפס.

חלק שני
שאלה 1

אם W תת מרחב של מרחב וקטורי V, אז:

א. כל בסיס של V מכיל בסיס כלשהו של W וכל בסיס של W מוכל בבסיס כלשהו של V.

ב. כל בסיס של V מכיל בסיס כלשהו של W אבל לא כל בסיס של W מוכל בהכרח בבסיס כלשהו של V.

ג. לא כל בסיס של V מכיל בהכרח בסיס כלשהו של W אבל כל בסיס של W מוכל בבסיס כלשהו של V.

ד. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 2

אם G היא הצורה המדורגת של מטריצה ריבועית A אז:

א. בהכרח $\det(A) = \det(G)$ וגם $adj(A) = adj(G)$.

ב. בהכרח $\det(A) = \det(G)$ אך ייתכן ש $adj(A) \neq adj(G)$.

ג. ייתכן ש $\det(A) \neq \det(G)$ אך בהכרח $adj(A) = adj(G)$.

ד. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

<u>שאלה 3</u>

אם T העתקה ליניארית ממרחב וקטורי V למרחב וקטורי W, $\{v_1,v_2,...,v_t\}$ קבוצה בלתי-תלויה ליניארית ב V, אז :

א. אם T חד- חד - ערכית אז $\{Tv_1,Tv_2,...,Tv_t\}$ קבוצה בלתי- תלויה - ליניארית ב W.

ב. אם $\{Tv_1,Tv_2,...,Tv_t\}$ קבוצה בלתי- תלויה -ליניארית ב W אז T חד- חד- ערכית.

ג. אם $\dim V < \dim W$ אז T חד- חד- ערכית.

ד. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

<u>שאלה 4</u>

תהיינה A מטריצה מסדר 3×5 ו- B מטריצה 5×3 אז :

א. AB הפיכה אם ורק אם BA הפיכה.

ב. AB בהכרח לא הפיכה.

ג. BA בהכרח הפיכה.

ד. אם $AB=0$ אז $rank(A)+rank(B)\le 5$.

<u>שאלה 5</u>

אם A מטריצה כך שלמערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים A פתרון יחיד אז בהכרח :

א. A הפיכה.

ב. למערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים A^t פתרון יחיד.

ג. לכל מערכת לא הומוגנית עם מטריצת מקדמים A פתרון יחיד.

ד. מרחב העמודות A שונה ממחב הפתרונות של A.

<u>שאלה 6</u>

תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית אז :

א. אם $KerT\ne\{0\}$ אז T אינה על.

ב. אם $KerT=\{0\}$ ו $\dim V\ge \dim W$ אז T על.

ג. אם $KerT=\{0\}$ ו $\dim V\le \dim W$ אז T על.

ד. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

<u>שאלה 7</u>

תהיינה A,B מטריצות ריבועיות מאותו סדר, אז בהכרח :

א. אם $|A|\ne 0$ אזי למערכת המשוואות $(AB)x=0$ יש פתרון יחיד.

ב. אם $|B|\ne 0$ אזי למערכת המשוואות $(AB)x=0$ יש פתרון יחיד.

ג. אם למערכת $(AB)x=0$ יש פתרון יחיד אז למערכת $Ax=0$ יש פתרון יחיד.

ד. אם למערכת $(AB)x=0$ יש פתרון יחיד אז למערכת $Bx=0$ יש פתרון יחיד.

ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 8

אם B מתקבלת ממטריצה A 3×3 ע"י כפל העמודה הראשונה ב-7 אז $\left|adj(A)B\right|$ היא:

א. $|A|^3$

ב. $|B|^3$

ג. $|A||B|^2$

ד. $|A|^2|B|$

שאלה 9

יהיו U,W שני תתי- מרחבים של מרחב V כך ש- $\dim V=n,\ \dim U=\dim W=n-1$ אז:

א. $n-2\le \dim(U\cap W)$

ב. אם $U\subset W$ ייתכן $U\neq W$

ג. קיים $v\in V$ כך ש- $V=U+sp\{v\}$ ו- $U\cap sp\{v\}=\{0\}$

ד. אם $U+sp\{v\}=V$ ו- $U\cap sp\{v\}=\{0\}$ אז $v\in W$.

שאלה 10

נתון כי $A=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{bmatrix}$ הפיכה. אז בהכרח:

א. למערכת $\begin{matrix}\alpha_{11}x+\alpha_{12}y=\alpha_{13}\\ \alpha_{21}x+\alpha_{22}y=\alpha_{23}\\ \alpha_{31}x+\alpha_{32}y=\alpha_{33}\end{matrix}$ פתרון יחיד.

ב. למערכת $\begin{matrix}\alpha_{11}x+\alpha_{12}y+\alpha_{13}z+w=0\\ \alpha_{21}x+\alpha_{22}y+\alpha_{23}z-4w=1\\ \alpha_{31}x+\alpha_{32}y+\alpha_{33}z+3w=-4\end{matrix}$ אינסוף פתרונות.

ג. למערכת $\begin{matrix}\alpha_{11}x+\alpha_{21}y+\alpha_{31}z=3\\ \alpha_{12}x+\alpha_{22}y+\alpha_{32}z=1\\ \alpha_{13}x+\alpha_{23}y+\alpha_{33}z=1\end{matrix}$ אין פתרון.

ד. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

טופס מבחן לדוגמה 3

חלק ראשון

שאלה 1

א. הגדירו את המושג: מטריצה סימטרית.

תהיינה A ו- B מטריצות ריבועיות מסדר $n\times n$, כך ש- $BA=AB$.

ב. אם A,B סימטריות הוכיחו כי AB^2 סימטרית.

ג. נניח כי $rankA=n-1$ ו- $v\neq 0$ הוא וקטור המקיים $Av=0$, הוכח כי Bv הוא כפולה של v בסקלר.

שאלה 2

א. הגדירו את המושג $span\{v_1,...,vL_n\}$ עבור קבוצת וקטורים $v_1,...,v_n$.

נניח כי v_1,v_2,v_3,v_4 הם וקטורים במרחב ליניארי V. הוכיחו כל אחת מהטענות הבאות:

ב. אם $Span\{v_1,v_2\}\cap Span\{v_3,v_4\}$ והוקטורים v_1,v_2,v_3,v_4 שונים זה מזה אז הוקטורים v_1-v_2 ו- v_3-v_4 הם בת"ל.

ג. אם v_1,v_2 בת"ל, וגם v_3,v_4 בת"ל, וכן $Span\{v_1,v_2\}\cap Span\{v_3,v_4\}=\{\underline{0}\}$, אז v_1,v_2,v_3,v_4 הם בת"ל.

שאלה 3

א. הגדר את המושג גרעין של טרנספורמציה לינארית.

ב. הוכח או הפרך: לכל מרחב ליניארי V ולכל ט"ל $T:V\to V$ מתקיים $\operatorname{Im}T^2\subseteq \operatorname{Im}T$

ג. הוכח או הפרך: אם $T:V\to V$ ט"ל שמקיימת $\ker T=\ker T^2$ ו- $\operatorname{Im}T^2=\operatorname{Im}T$ אז $T=T^2$.

חלק שני

שאלה 1

אם V,W תת מרחבים של מרחב וקטורי U ומתקיים: $\dim U=6,\dim V=5,\dim W=3$ אז $\dim(V\cap W)$ יכול להיות:

א. 0.
ב. 1.
ג. 2
ד. 3
ה. 4
ו. 5

שאלה 2

V,W תת- מרחבים ממימד 3 של $I\mathbb{R}^7$, $\{w_1,w_2,w_3\}$ בסיס של W , $\{v_1,v_2,v_3\}$ בסיס של V,
אז :

א. $\{v_1,w_1,v_2,w_2,v_3,w_3\}$ בלתי תלויה לינארית.

ב. $\{v_1,w_1,v_2,w_2,v_3,w_3\}$ פורשת את $V+W$.

ג. $\{v_1+w_1+v_2+w_2+v_3+w_3\}$ בת"ל.

ד. $\{v_1+w_1+v_2+w_2+v_3+w_3\}$ פורשת את $V+W$.

ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

<u>שאלה 3</u>

A מטריצה ריבועית, B מתקבלת מ A ע"י סדרת פעולות דירוג (בשורות). ע"י הפעלת אותה סדרה של פעולות תתקבל גם :

א. B^2 מ A^2 .

ב. BA מ A^2 .

ג. B^2 מ BA .

ד. B^2 מ AB .

ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

<u>שאלה 4</u>

A מטריצה <u>לא</u> ריבועית כך שלמערכת המשוואות ההומוגנית $Ax=0$ פתרון יחיד, אז :

א. יש מערכת לא הומוגנית $Ax=b$ ללא פתרון.

ב. יש מערכת לא הומוגנית $Ax=b$ עם יותר מפתרון אחד.

ג. יש מערכת לא הומוגנית $A'y=c$ ללא פתרון .

ד. יש מערכת לא הומוגנית $A'y=c$ עם יותר מפתרון אחד.

ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

<u>שאלה 5</u>

A,B מטריצות ריבועיות מאותו סדר, $B\neq 0$, אז :

א. אם $AB=0$ אז $A=0$.

ב. אם $AB=0$ אז $|A|=0$.

ג. אם $|AB|=0$ אז $A=0$.

ד. אם $|AB|=0$ אז $|A|=0$.

ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

<u>שאלה 6</u>

B מטריצה 5×3, A מטריצה 3×5, אז בהכרח:

א. $\det(AB)=\det(BA)$
ב. $rank(AB)=rank(BA)$
ג. $rank(AB)\neq rank(BA)$
ד. $adj(AB)\neq adj(BA)$
ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

<u>שאלה 7</u>

A מטריצה ריבועית, B מתקבלת מ-A ע"י הכפלת השורה הראשונה פי 7, אז $adjB$ מתקבלת מ-$adjA$ ע"י:

א. הכפלת השורה הראשונה פי 7.
ב. הכפלת כל שורה פרט לראשונה פי 7.
ג. הכפלת העמודה הראשונה פי 7.
ד. הכפלת כל עמודה פרט לראשונה פי 7.
ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

<u>שאלה 8</u>

קיימת העתקה לינארית T ממרחב וקטורי V למרחב וקטורי W, כך ש- $\ker T=\operatorname{Im}T$,
$\dim W=4$ ו- $\dim V$ הוא:

א. 10
ב. 9
ג. 7
ד. 6
ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

<u>שאלה 9</u>

אם A מטריצה <u>לא</u> ריבועית אז בהכרח:

א. מרחב השורות של A' שווה למרחב השורות של A.
ב. מרחב השורות של A' שונה ממרחב השורות של A.
ג. ממד מרחב השורות של A' שווה לממד מרחב השורות של A.
ד. ממד מרחב השורות של A' שונה מממד מרחב השורות של A.
ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

<u>שאלה 10</u>

A מטריצה 3×3 כך ש- $A^2=0$ אבל $A\neq 0$, אז הדרגה של A יכולה להיות:

א. 0
ב. 1
ג. 2
ד. 3
ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

<u>טופס מבחן לדוגמה 4</u>

<u>שאלה 1</u>

תהי A מטריצה ממשית **לא ריבועית** מסדר $m\times n$. אזי בהכרח מתקיים:

א. אם למערכת $Ax=b$ יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$ אז בהכרח $m<n$.
ב. ייתכן ש- $A^tA=I_m$ וגם $AA^t=I_m$.
ג. אם $rank(A)=m$ אז למערכת ההומוגנית $Ax=0$ יש אינסוף פתרונות.
ד. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ יש אינסוף פתרונות אז בהכרח $m<n$.
ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

<u>שאלה 2</u>

יהיו A,B מטריצות ממשיות מסדר $n\times n$. אז בהכרח מתקיים:

א. אם למערכת ההומוגנית $(AB)x=0$ קיימים שני פתרונות שונים אז בהכרח $|A|=0$.
ב. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת ההומוגנית $(AB)x=0$ אז למערכת ההומוגנית $(BA)x=0$ קיים פתרון שונה מ-0.
ג. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ קיים פתרון יחיד אז ייתכן ש $A^2=0$.
ד. אם למערכת ההומוגנית $(A^tA)x=0$ קיים פתרון יחיד אז השורות של A תלויות ליניארית.
ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

<u>שאלה 3</u>

תהיינה A,B מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n\geq 4$. אזי בהכרח מתקיים:

א. אם $rank(A)=n-2$ אז בהכרח $adj(A)=0$.
ב. אם $adj(A),adj(B)$ מטריצות משולשיות והפיכות אז בהכרח $adj(AB)$ מטריצה משולשית עליונה והפיכה.
ג. אם A אנטי- סימטרית אז בהכרח $adj(A)$ אנטי- סימטרית.
ד. אם $adj(A)=0$ אז בהכרח $A=0$ /
ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

<u>שאלה 4</u>

תהיינה A,B מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n\geq 2$. אזי בהכרח מתקיים:

א. $AB=BA$.
ב. אם $A^2-AB=I_n$ אז בהכרח $AB=BA$.
ג. אם $(AB)^{100}=I$ אז בהכרח $(BA)^{100}=I$
ד. אם $(AB)^{100}=0$ אז בהכרח $(BA)^{100}=0$
ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

<u>שאלה 5</u>

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ויהיו $v_1,v_2,v_3 \in V$ נסמן $S=\{v_1,v_2,v_3\}$

$T=\{av_1+v_2+v_3, v_1+av_2+v_3, v_1+v_2+av_3\}$ אז בהכרח מתקיים:

א. $spS \subseteq spT$.
ב. אם S בלתי תלויה לינארית ואם $a \neq -2,1$ אז בהכרח $spT = spS$.
ג. $\dim(spT) \leq 2$.
ד. $\dim(spT)=\dim(spS)$
ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

<u>שאלה 6</u>

תהי $A=(a_{ij})$ מטריצה ריבועית מסדר $n \geq 3$ כך ש- $a_{ij}=i+j-1$. אז בהכרח מתקיים:

א. $|A|=2$
ב. $|A|=0$
ג. עמודות A בלתי- תלויות ליניארית.
ד. $adj(A)=0$.
ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

<u>שאלה 7</u>

תהיינה A,B מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n \geq 2$. אזי בהכרח מתקיים:

א. מרחב השורות של AB מוכל במרחב השורות של A.
ב. אם $AB=0$ אז בהכרח $B=0$ או $A=0$.
ג. אם AB משולשית עליונה אז בהכרח A משולשית עליונה או B משולשית עליונה.
ד. אם $AB=2I_n$ אז בהכרח $BA=2I_n$.
ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

<u>שאלה 8</u>

נסמן $U=Sp\left\{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\right\}$, $W=Sp\left\{\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_3\\b_3\\c_3\end{pmatrix}\right\}$ שני תת- מרחבים של $\mathbb{R}^3$.

אזי בהכרח מתקיים:

א. $U=W$.
ב. $\dim U = \dim W$.
ג. $U \subseteq W$.
ד. אם $U+W=\mathbb{R}^3$ אז $U \cap W=\{0\}$.
ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

<u>שאלה 9</u>

תהי A מטריצה ריבועית מסדר 5 ונניח ש $|adj((-1+i)A)|=i$ אז **הערך המוחלט של הדטרמיננט** שווה ל- :

א. $\sqrt[4]{2}$

ב. $-3i$

ג. 0 .

ד. $\frac{\sqrt{2}}{8}$

ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

<u>שאלה 10</u>

הקבוצה הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$: $\left\{\begin{pmatrix} a+1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a-4 \\ a+4 \end{pmatrix}\right\}$

א. בלתי תלויה ליניארית (לכל $a\in\mathbb{Z}_5$).

ב. תלויה ליניארית (לכל $a\in\mathbb{Z}_5$).

ג. בלתי תלויה ליניארית אם ורק אם $a\neq 0, a\neq 4$.

ד. בלתי תלויה ליניארית אם ורק אם $a\neq 4$.

ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

<u>שאלה 11</u>

תהי A קבוצה בת 6 פולינומים במרחב $\mathbb{R}_5[x]$ מעל $\mathbb{R}$ (מרחב הפולינומים ממעלה עד וכולל 6), ונניח בנוסף ש- $\mathbb{R}_5[x]=Sp(A)$. אזי בהכרח מתקיים :

א. ייתכן ש A מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 2.

ב. ייתכן ש A מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 1.

ג. שני תת- מרחבים של $\mathbb{R}_5[x]$ מאותו מימד בהכרח שווים.

ד. A תלויה לינארית.

ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

<u>שאלה 12</u>

יהי a מספר ממשי ויהיו $W=Sp\left\{\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \\ a \end{pmatrix}\right\}, U=Sp\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ שני תתי מרחבים של $\mathbb{R}^4$

בהכרח מתקיים :.

א. $U\cap W=\{0\}$ לכל ערכי a .

ב. $U\cap W\neq\{0\}$ לכל ערכי a

ג. $\dim(U\cap W)=3$ לכל ערכי $a\neq\pm1$.

ד. $\dim(U\cap W)=1$ לכל ערכי $a\neq\pm1$.

ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

<u>שאלה 13</u>

נתונות המטריצות $R=\begin{bmatrix}2 & 5 & 5\\ -1 & -1 & 0\\ 2 & 4 & 3\end{bmatrix}$ $T=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 6 & 9\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}$. אז בהכרח מתקיים:

א. $rank(T)=1, rank(R)=2$

ב. $rank(R^3T^5)=1$

ג. **מרחב השורות** של R^3T^5 שווה **למרחב השורות** של T^5.

ד. $T^{100}=0$.

ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

<u>שאלה 14</u>

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, ותהי $A=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ קבוצה של וקטורים מ- V $(1\le n)$. נניח בנוסף ש $\dim(V)=n$. אזי בהכרח מתקיים:

א. אם A בלתי תלויה לינארית אז A פורשת את V.

ב. אם A קבוצה פורשת ל- V אז A בלתי תלויה לינארית.

ג. ייתכנו מקרים בהם A פורשת את V, אך A תלויה לינארית.

ד. ייתכנו מקרים בהם A בלתי תלויה לינארית, אך A אינה פורשת את V.

ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

<u>שאלה 15</u>

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, ותהיינה A,B **קבוצות שונות לא ריקות** של וקטורים מ- V.
אז בהכרח מתקיים:

א. אם $A\cup B$ בלתי תלויה לינארית, אז בהכרח $sp(A)\cap sp(B)=\{0\}$.

ב. אם A,B תלויות ליניארית אז בהכרח $A\cap B$ תלויה לינארית.

ג. אם A,B בלתי תלויות ליניארית אז בהכרח $A\cup B$ בלתי תלויה לינארית.

ד. אם $sp(A)\cup sp(B)=sp(A\cup B)$ אז בהכרח $A\cup B$ תלויה לינארית.

ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

<u>שאלה 16</u>

תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית כך ש $\dim(V)=n$ ויהיו B_2,B_1 בסיסים סדורים של V.
אז בהכרח מתקיים:

א. $[T]_{B_1}^{B_1}=I_n$

ב. אם T העתקת זהות אז בהכרח $[T]_{B_1}^{B_1}=I_n$.

ג. אם T העתקת זהות אז בהכרח $[T]_{B_2}^{B_1}[T]_{B_1}^{B_2}=I_n$.

ד. אם $\mathrm{Im}(T)\subseteq\ker(T)$ אז בהכרח $T\neq 0$.

ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

<u>שאלה 17</u>

תהי $T:M_3(\mathbb{R})\to M_3(\mathbb{R})$ העתקה ליניארית המוגדרת באופן $T(A)=A-A^t$. אז בהכרח מתקיים:

א. $\dim(\operatorname{Im}(T))=\dim(\ker(T))$

ב. אם B בסיס ל- $M_3(\mathbb{R})$ אזי $[T]_B^B$ מסדר 9.

ג. $\dim(\ker(T))=3$

ד. $\dim(\operatorname{Im}(T))=3$

ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות

<u>שאלה 18</u>

תהי $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ העתקה לינארית, ותהי A מטריצה ממשית כך שמתקיים $T(v)=Av$ לכל $v\in\mathbb{R}^n$. אזי בהכרח מתקיים:

א. אם $rank(A)=n$ אזי T לא בהכרח חד- חד ערכית.

ב. אם B בסיס ל- $\mathbb{R}^4$ ואם $rank(A)=n$ אזי $[T]_B^B$ הפיכה.

ג. אם $T(T(v))=0$ לכל $v\in\mathbb{R}^n$ אז $rank(A)\le n/2$.

ד. ייתכנו מקרים בהם $rank(A)=n$ אבל T אינה על.

ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

<u>שאלה 19</u>

תהי $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ העתקה לינארית. אזי בהכרח:

א. אם T היא איזומורפיזם, אזי $m=n$.

ב. אם $m>n$ אזי T חח״ע.

ג. אם $T(v)=Av$ לכל $v\in V$ (כאשר A מטריצה ממשית נתונה), אזי ל- A יש m שורות ו-n עמודות.

ד. אם $T(v)=Av$ לכל $v\in V$ (כאשר A מטריצה ממשית נתונה), אזי ל- A יש n שורות ו-m עמודות.

ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

<u>שאלה 20</u>

תהי $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ העתקה לינארית, ויהי $B=\{v_1,v_2,v_3v_4\}$ בסיס ל- $\mathbb{R}^4$. אזי בהכרח מתקיים:

א. ייתכנו מקרים בהם T העתקה חד- חד ערכית.

ב. ייתכנו מקרים בהם $T(v_1=0)$ אבל T חד- חד ערכית.

ג. אם T העתקת על אזי בהכרח $\ker(T)$ מכילה וקטור שונה מאפס.

ד. הקבוצה $\{T(v_1),T(v_2),T(v_3),T(v_4)\}$ בלתי תלויה לינארית.

ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

<u>טופס מבחן לדוגמה 5</u>

חלק ראשון

שאלה 1

תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית המקיימת $\ker T=\operatorname{Im}T$. אז בהכרח מתקיים :

א. אם T על אז בהכרח $V=\{\underline{0}\}$.
ב. T היא איזומורפיזם.
ג. T היא העתקת האפס.
ד. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

שאלה 2

תהי $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ העתקה ליניארית ותהי A מטריצה מגודל $m\times n$ כך ש $T(v)=Av$ לכל $v\in\mathbb{R}^n$ אז בהכרח :

א. אם $v\in\ker T$ אז v שייך למרחב השורות של A .
ב. אם v שייך למרחב השורות של A אז $v\in\ker T$.
ג. אם v שייך למרחב העמודות של A אז $v\in\operatorname{Im}T$.
ד. אם $\ker T=\{\underline{0}\}$ אז $n<m$.
ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

שאלה 3

נניח A,B מטריצות דומות מגודל $n\times n$. אז בהכרח מתקיים :

א. A הפיכה אם ורק אם B הפיכה.
ב. אם $|B|=|-A|$ אז n איזוגי.
ג. אם A הפיכה אז A שקולת שורות ל- B .
ד. ייתכן ש- $|B|\neq|A|$.
ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

שאלה 4

נניח A,B מטריצות מסדר גודל $n\times n$ המקיימות $A^2-2AB=I_n$. אז בהכרח מתקיים :

א. B הפיכה.
ב. $|A|=0$.
ג. למערכת $ABx=0$ פתרון יחיד
ד. $AB=BA$.
ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

שאלה 5

תהי A מטריצה ממשית מגודל $m\times n$, כאשר $m<n$. נסמן ב- A^T את המטריצה המוחלפת. בהכרח:

א. מימד מרחב הפתרונות של המערכת $AX=0$ הוא $n-m$.
ב. למערכת $\left(A^T A\right)x=0$ יש אינסוף פתרונות.
ג. ייתכן מצב בו למערכת $\left(A^T A\right)x=0$ יש פתרון יחיד.
ד. ייתכן מצב בו למערכת $\left(AA^T\right)x=0$ יש פתרון יחיד.
ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

<u>שאלה 6</u>

תהיינה A,B מטריצות כלשהן. אזי בהכרח:

א. אם המכפלה AB היא מטריצה ריבועית אזי A,B מטריצות ריבועיות.
ב. אם המכפלה AB היא מטריצה הפיכה, אזי A,B מטריצות ריבועיות.
ג. אם A מטריצה ריבועית והמכפלה AB מוגדרת, אזי B מטריצה ריבועית.
ד. אם A,B מטריצות ריבועיות מאותו סדר וכן $rank\left(A\right)>rank\left(B\right)$, אזי $rank\left(AB\right)>rank\left(B\right)$.
ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

<u>שאלה 7</u>

וקטור הקואורדינטות של הפולינום $2x^3+12x^2-x+11$ ביחס לבסיס $\left\{2x^3+3x^2+2, x+1, x^3+x^2, 2x^2+2\right\}$ הוא:

א. $\left(2,2,-2,4\right)$
ב. $\left(4,-2,-1,2\right)$
ג. $\left(2,-1,-2,4\right)$
ד. $\left(4,-1,2,2\right)$
ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

<u>שאלה 8</u>

תהי A מטריצה כלשהי. אזי בהכרח:

א. אם שורות A בלתי תלויות ליניארית אזי עמודות A בלתי תלויות ליניארית.
ב. אם שורות A בלתי תלויות ליניארית וגם עמודות A בלתי תלויות ליניארית אזי בהכרח A מטריצה ריבועית.
ג. אם שורות A בלתי תלויות ליניארית וגם עמודות A בלתי תלויות ליניארית אזי A מטריצה הפיכה.
ד. אם שורות A בלתי תלויות ליניארית אזי בהכרח למערכת $Ax=0$ יש פתרון יחיד
ה. כל התשובות א-ד אינן נכונות.

<u>חלק שני</u>

שאלה 1

א. נתונים תת- מרחבים של $\mathbb{R}^4$ מעל $\mathbb{R}$:

$$U=\left\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4\,\middle|\,a+b+c=d\right\}$$

$$W=sp\left\{(1,0,1,1),(0,2,1,0),(0,1,1,1),(1,1,1,0)\right\}$$

מצאו בסיסים וממדים עבור $U,W,U\cap W$

ב. עבור תת מרחבים K,L של מרחב וקטורי V, הגדירו את $K+L$.

ג. במרחב וקטורי V בעל מימד 6 נתונים תת- מרחבים K,L המקיימים $\dim K=\dim L=5, K\neq L$ מצאו את $\dim(K\cap L)$. הסבירו כל שלב.

ד. נתונים וקטורים במרחב $\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{R}$: $u=(3,a-6)$ $v=(a+2,-6)$ הוכיחו כי לכל a ממשי הקבוצה $\{u,v\}$ היא בסיס של $\mathbb{R}^2$.

שאלה 2

א. נתונה העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ המקיימת

$$T(-1,3)=(1,1)$$
$$T(2,-1)=(0,-1)$$

מצאו מטריצה A כך ש- $T(v)=Av$ לכל $v\in\mathbb{R}^2$.

ב. נניח V,U מרחבים וקטורים מעל שדה F .

הגדירו את המושג: העתקה לינארית מ- V ל- U.

ג. יהי $V=M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ מרחב כל המטריצות 2×2 מעל $\mathbb{R}$. נסמן $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

ונגדיר $S:V\to V$ ע"י $S(M)=MA$ לכל $M\in V$.

1. הוכיחו ש- S העתקה לינארית.
2. האם S איזומורפיזם? הסבירו.

ד. נניח A,B הן מטריצות ממשיות 5×5 המקיימות $|AB|=|-BA|$. הוכיחו שלפחות אחת המטריצות A,B אינה הפיכה.

שאלה 3

א. יהי $V=\mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה 2 ומטה מעל $\mathbb{R}$.

נתון הבסיס $B=\{1,x,x^2\}$

ונתונה ההעתקה הלינארית $T:V\to V, \quad T(p(x))=xp^n(x)-p'(x)$.

1. מצאו את המטריצה המייצגת $[T]_B$.
2. מצאו בסיסים וממדים עבור $\operatorname{Im}T,\ker T$.

ב. נתונה מערכת מעל השדה $\mathbb{Z}_5$: $\begin{cases}(a+1)x-ay=2\\3x+(a+1)y=a\end{cases}$

מצאו עבור אילו ערכי $a\in\mathbb{Z}_5$ זוהי מערכת עם פתרון יחיד.

ג. חשבו את $(1-i)^{34}$

ד. נתונות מטריצות ממשיות A מסדר 2×4 ו- B מסדר 4×4
כך ש- $rank(A)=2,\quad rank(B)=3$. הוכיחו כי $AB\neq 0$.

<u>טופס מבחן לדוגמה 6</u>

<u>שאלה 1</u>

א. הגדירו דרגה של מטריצה A .

ב. תהי $A=\begin{pmatrix}1 & k & -1 & 2\\ 2 & -1 & k & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1\end{pmatrix}$ קבעו לאיזה k מתקיים:

1. $rankA=1$ .2 $rankA=2$ .3 $rankA=3$ .4 $rankA=4$.

ג. תהי $\underline{a}=(a1,a2,a3)\in\mathbb{R}^3$ שלשה של מספרים ממשיים.

תהי A המטריצה ששורותיה $\underline{a},2\underline{a},3\underline{a}$ (כלומר $A=\begin{pmatrix}- & \underline{a} & -\\ - & 2\underline{a} & -\\ - & 3\underline{a} & -\end{pmatrix}$).

ידוע כי יש ל- A ע״ע שונה מאפס. הוכיחו כי A לכסינה.

שאלה 2

יהי $V=\mathbb{R}_2[x]$. יהי $W=\left\{p(x)\in V \,\middle|\, p(2)=p'(1)\right\}$.

א. הוכיחו כי W הוא תת מרחב וקטורי של V.

ב. נתונים שלושת תתי המרחב הבאים של V:

1. $U_1=Span\left\{1,2x-x^2\right\}$ .2 $U_2=Span\left\{1-x^2,3x^2-3\right\}$

3. $U_3=Span\left\{3-x-x^2\right\}$.

קבעו לכל $i=1,2,3$ האם $V=W\oplus U_i$. נמקו את תשובתכם.

ג. קבעו האם קיימת העתקה ליניארית $T:V\to V$ כך ש- $KerT=U_3,\operatorname{Im}T=W$.
אם כן, מצאו העתקה כזו, אם לא, הוכיחו מדוע אין.

שאלה 3

א. תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית. הגדירו T חח״ע. מצאו תנאי הכרחי ומספיק (שונה מההגדרה) לכך ש- T תהה חח״ע (אין צורך להוכיחו).

ב. יהי $V=\mathbb{R}_2[x]$. תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית. נתון כי המטריצה המייצגת את T בבסיס $B=\left(1+x,\frac{1}{2}+x^2,x\right)$ היא $T_{[B]}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$. הוכיחו כי T הפיכה.

ג. חשבו מהי $T^{-1}\left(a+bx+cx^2\right)$ (הקפידו להסביר את צעדיכם!).

שאלה 4

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 4 & 1\end{pmatrix}$ (התלויה בפרמטר a.

א. עבור $a=3$ תנו דוגמא לזוג $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ שאינו וקטור עצמי של A.

ב. קבעו לאיזה a הזוג $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של A.

ג. יהי $\underline{0} = \underline{u} \in \mathbb{R}^2$ וקטור שאינו וקטור עצמי של A. הוכיחו כי $\{\underline{u}, A\underline{u}\}$ בסיס של $\mathbb{R}^2$.

<u>שאלה 5</u>

א. יהי $V = \mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה 2 ומטה.

נגדיר את המכפלה הפנימית הבאה :

עבור $p(x) = a_1 + b_1x + c_1x^2, q(x) = a_2 + b_2x + c_2x^2, (p,q) = 4a_1a_2 + 2b_1b_2 + c_1c_2$

1. הוכיחו כי זו אכן מכפלה פנימית.
2. מצאו בסיס אורתונורמלי ל- V ביחס למכפלה שהגדרנו.

ב. נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. מצאו בסיס למשלים האורתוגונלי של מרחב הפתרונות של A (ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- $\mathbb{R}^4$).